Grundkurs Mathematik Test

Lösung zu T.5.1

1. Es liegt eine Binomialverteilung mit $p = 0{,}3$ vor. Z gebe die Anzahl der Patienten an, die auf Placebos ansprechen.

   a) $n = 6$: Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit

   $$B_{0,3}^{6}(Z \geq 1) = 1 - B_{0,3}^{6}(Z = 0) = 1 - 0{,}11765 = 0{,}88235$$
   $$= 88{,}24\ \% \qquad \text{(Tabelle der Binomialverteilungen)}$$

   b) $n = 50$: Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit

   $$B_{0,3}^{50}(Z \leq 13) = 0{,}32788 = 32{,}79\ \% \qquad \text{(kumulative Tabelle)}$$

   c) $n = 100$: Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit

   $$B_{0,3}^{100}(23 \leq Z \leq 35) = B_{0,3}^{100}(Z \leq 35) - B_{0,3}^{100}(Z \leq 22)$$
   $$= 0{,}88392 - 0{,}04787$$
   $$= 0{,}83605 = 83{,}61\ \% \qquad \text{(kumulative Tabelle)}$$

2. a) Es gilt stets: P (mindestens ein …) = 1 – P (kein …), d. h.

   $$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z = 0) > 0{,}99 \quad \text{für } p = 0{,}3 \text{ und gesuchtem } n.$$
   $$1 - B_{0,3}^{n}(Z = 0) > 0{,}99$$
   $$1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}3^{0} \cdot 0{,}7^{n} > 0{,}99$$
   $$1 - 0{,}7^{n} > 0{,}99$$
   $$0{,}7^{n} < 0{,}01$$
   $$n \cdot \ln 0{,}7 < \ln 0{,}01 \qquad \big|: \ln 0{,}7 < 0\ (!)$$
   $$n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}7} = 12{,}91 \Rightarrow n \geq 13$$

   oder kurz:

   $$1 - (1-p)^{n} > \gamma$$
   $$1 - 0{,}7^{n} > 0{,}99$$

   b) Es soll gelten:

   $$B_{p}^{10}(Z = 0) > 0{,}5$$
   $$\binom{10}{0} \cdot p^{0} \cdot (1-p)^{10} > 0{,}5$$
   $$(1-p)^{10} > 0{,}5$$
   $$1 - p > \sqrt[10]{0{,}5}$$
   $$p < 1 - \sqrt[10]{0{,}5} = 1 - 0{,}93303 = 0{,}06697$$
   $$p < 6{,}70\ \%$$

Grundkurs Mathematik Test

Lösung zu T.5.2

1. a) Es treten acht KAT-Autos und sieben Nicht-KAT-Autos auf. Da die Autos sonst nicht weiter unterschieden werden, gilt

   $$|\Omega| = \binom{15}{8} = \binom{15}{7}$$

   (1) Für dieses Ereignis E_1 gilt, dass man die acht KAT-Autos auf zehn Plätze verteilen kann, d. h.

   $$|E_1| = \binom{10}{8}$$
   $$\Rightarrow P(E_1) = \frac{\binom{10}{8}}{\binom{15}{8}} = \frac{45}{6\,435} = 0{,}007 = 0{,}7\ \%$$

   (2) Für dieses Ereignis E_2 können die acht KAT-Autos auf den Plätzen 1–8, 2–9, …, 8–15 hintereinander stehen, d. h. es gibt acht Möglichkeiten.

   $$\Rightarrow P(E_2) = \frac{8}{\binom{15}{8}} = \frac{8}{6\,435} = 0{,}00124 = 0{,}12\ \%$$

   b) Für dieses Ereignis E_3 gilt, dass die restlichen sieben KAT-Autos auf die übrigbleibenden vierzehn Plätze verteilt werden können, d. h.

   $$|E_3| = \binom{14}{7}$$
   $$\Rightarrow P(E_3) = \frac{\binom{14}{7}}{\binom{15}{8}} = 0{,}53333 = 53{,}33\ \%$$

2. Es liegt eine Binomialverteilung mit $n = 100$ und $p = 0{,}65$ vor. Gesucht sind die Wahrscheinlichkeiten

   a) $B_{0,65}^{100}(Z \leq 65) = 1 - 0{,}46243 = 0{,}53757 = 53{,}78\ \%$ (kumulative Tabelle)

   b) $$B_{0,65}^{100}(52 \leq Z < 70) = B_{0,65}^{100}(Z \leq 69) - B_{0,65}^{100}(Z \leq 51)$$
   $$= (1 - 0{,}17302) - (1 - 0{,}99725)$$
   $$= 0{,}82423 = 82{,}42\ \% \qquad \text{(kumulative Tabelle)}$$

3. Es gilt stets: P (mindestens ein …) = 1 – P (kein …), d. h.

   $$1 - (1-p)^{n} > \gamma$$
   $$1 - 0{,}35^{n} > 0{,}95$$
   $$0{,}35^{n} < 0{,}05$$
   $$n \cdot \ln 0{,}35 < \ln 0{,}05 \qquad \big|: \ln 0{,}35 < 0\ (!)$$
   $$n > \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}35} = 2{,}85 \Rightarrow n \geq 3$$

   Man muss mindestens drei vorbeifahrende Autos beobachten.

Grundkurs Mathematik Test

Lösung zu T.6.1

1. Es liegt eine Binomialverteilung mit $p = 0{,}15$ vor. Z gebe die Anzahl der unbrauchbaren Bälle an.

a) $n = 5$:

(1) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit

$$B^{5}_{0,15}(Z = 0) = 0{,}44371 = 44{,}37\,\% \qquad \text{(Tabelle oder Taschenrechner)}$$

(2) Wenn sich unter fünf Bällen mindestens drei brauchbare finden, dann dürfen höchstens zwei unbrauchbar sein, d. h. gesucht ist die Wahrscheinlichkeit

$$B^{5}_{0,15}(Z \le 2) = 0{,}97339 = 97{,}34\,\% \qquad \text{(kumulative Tabelle)}$$

b) Das Intervall liegt symmetrisch um 30.

$$B^{200}_{0,15}(30-k \le Z \le 30+k) =$$
$$B^{200}_{0,15}(Z \le 30+k) - B^{200}_{0,15}(Z \le 30-k-1) \ge 0{,}95$$

Aus der Tabelle liest man ab:

k = 9:

$$B^{200}_{0,15}(Z \le 39) - B^{200}_{0,15}(Z \le 20) = 0{,}96645 - 0{,}02547$$
$$= 0{,}94098 < 0{,}95$$

k = 10:

$$B^{200}_{0,15}(Z \le 40) - B^{200}_{0,15}(Z \le 19) = 0{,}97800 - 0{,}01488$$
$$= 0{,}96312 > 0{,}95$$

$\Rightarrow k = 10 \Rightarrow$ Intervall [20; 40]

2. Da die Bälle nur nach brauchbar und unbrauchbar unterschieden werden, gilt es für die zwei unbrauchbaren Bälle

$$\binom{10}{2} = 45 \text{ Möglichkeiten der Anordnung.}$$

Die Anordnung „erster und zehnter Ball sind unbrauchbar“ ist eine der 45 Möglichkeiten, d. h. für dieses Ereignis gilt:

$$P(E) = \frac{1}{45} = 0{,}02222 = 2{,}22\,\%$$

3. Man glaubt der Behauptung des Herstellers, wenn höchstens zehn unbrauchbare Bälle in der Stichprobe der Länge $n = 100$ sind. Wenn sich nichts geändert hat, d. h. $p = 0{,}15$ geblieben ist, dann tritt diese Fehlentscheidung mit der folgenden Wahrscheinlichkeit auf, wobei Z wieder die Anzahl der unbrauchbaren Bälle angibt:

$$B^{100}_{0,15}(Z \le 10) = 0{,}09945 = 9{,}95\,\%$$

Grundkurs Mathematik Test

Lösung zu T.6.2

1. Es liegt eine Binomialverteilung mit $p = 0{,}04$ vor. Z gebe die Anzahl der Pakete an, die ein Füllgewicht unter 500 g besitzen.

a) $n = 100$:

(1) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit

$$B^{100}_{0,04}(Z \ge 1) = 1 - B^{100}_{0,04}(Z = 0)$$
$$= 1 - 0{,}01687 = 0{,}98313$$
$$= 98{,}31\,\% \qquad \text{(Tabelle oder Taschenrechner)}$$

(2) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit

$$B^{100}_{0,04}(Z \le 6) = 0{,}89361 = 89{,}36\,\% \qquad \text{(kumulative Tabelle)}$$

b) n ist gesucht. Den Wert für n berechnet man aus

$$B^{n}_{0,04}(Z = 0) \ge 0{,}65$$
$$\binom{n}{0} \cdot 0{,}04^{0} \cdot 0{,}96^{n} \ge 0{,}65$$
$$0{,}96^{n} \ge 0{,}65$$
$$n \cdot \ln 0{,}96 \ge \ln 0{,}65 \quad \Big| : \ln 0{,}96 < 0 (!)$$
$$n \le \frac{\ln 0{,}65}{\ln 0{,}96} = 10{,}55 \Rightarrow n \le 10$$

Man darf höchstens 10 Pakete überprüfen.

2. Für den geforderten Signifikanztest wird der Ablehnungsbereich $\overline{A}$ der Hypothese H_0: $p_0 > 0{,}04$ bestimmt. Dann wird nämlich die Behauptung akzeptiert. H_0 wird abgelehnt, wenn zu „wenige“ Pakete mit einem zu niedrigen Füllgewicht gefunden werden. Z gebe die Anzahl dieser Pakete an.

$$H_0: p_0 > 0{,}04; \quad n = 200; \quad \overline{A} = \{0, \ldots, k\}$$
$$B^{200}_{0,04}(Z \le k) \le 0{,}05$$

Aus der kumulativen Tabelle liest man ab:

$$k = 3 \Rightarrow \overline{A} = \{0, 1, 2, 3\}$$

Man akzeptiert die Behauptung nur, wenn sich höchstens drei Pakete unter den 200 finden lassen, die ein zu niedriges Füllgewicht besitzen. Für diesen Fall ist die Irrtumswahrscheinlichkeit höchstens 5 %.

Grundkurs Mathematik Klausur

Lösung zu Kl.4.1

1. a) (1) Da die Briefe nur nach dem Zielort C bzw. Nicht-C unterschieden werden, müssen die drei Plätze (sieben Plätze) für die drei (sieben) Briefe nach C (nicht nach C) ausgewählt werden, d. h. es gibt

$\binom{10}{3} = 120$ Möglichkeiten der Anordnung

oder:

Es gäbe 10! Anordnungen, wenn man die Briefe unterscheiden könnte. Davon sind aber $3! \cdot 7!$ nicht unterscheidbar, d. h. es gibt

$\frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$ Möglichkeiten der Anordnung

(2) Für den ersten Brief gibt es drei Möglichkeiten. Die restlichen neun Briefe können auf 9! Arten permutiert werden, d. h. es gibt

$3 \cdot 9! = 1\,088\,640$ Möglichkeiten der Anordnung.

b) Verwendet wird das Urnenmodell des Ziehens ohne Zurücklegen mit

$|\Omega| = \binom{10}{3} = 120$.

(1) Zwei Briefe müssen aus den drei nach C, der verbleibende aus den sieben anderen ausgewählt werden, d. h. wenn Z die Anzahl der Briefe nach C angibt, gilt:

$$P(Z=2) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{7}{1}}{\binom{10}{3}} = 0{,}175 = 17{,}5\,\%$$

(2) Mit den Überlegungen zu (1) gilt:

$$P(Z \le 1) = P(Z=0) + P(Z=1)$$
$$= \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{7}{3}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{35}{120} + \frac{63}{120} = \frac{98}{120} = 81{,}67\,\%$$

2. Es gilt jetzt stets: $P(C) = 0{,}3$ und $P(\overline{C}) = 0{,}7$

Ereignis A:

Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette der Länge 10 mit drei „Treffern“, d. h. es gilt:

$$P(A) = \binom{10}{3} \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^7 = B^{10}_{0,3}(Z=3) = 0{,}26683 = 26{,}68\,\%$$

(Taschenrechner oder Tabelle)

Ereignis B:

Es liegen vier „Treffer“ vor. Da der vierte Treffer als 10. Brief festliegt, können die restlichen drei auf neun Plätze verteilt werden, d. h. es gilt

$$P(B) = \binom{9}{3} \cdot 0{,}3^4 \cdot 0{,}7^6 = 0{,}08005 = 8{,}01\,\% \qquad \text{(Taschenrechner)}$$

Ereignis C:

Dem ersten Brief nach C gehen vier nicht nach C voraus, d. h. es gilt:

$$P(C) = 0{,}7^4 \cdot 0{,}3 = 0{,}07203 = 7{,}20\,\% \qquad \text{(Taschenrechner)}$$

Ereignis D:

Das Ereignis, dass fünf Briefe nicht nach C gehen, darf nicht auftreten, d. h. es gilt

$$P(D) = 1 - 0{,}7^5 = 1 - 0{,}16807$$
$$= 0{,}83193 = 83{,}19\,\% \qquad \text{(Taschenrechner)}$$

3. a) Es gilt stets: P(mindestens ein …) = 1 − P(kein …), d. h.

$$1-(1-p)^n > \gamma \quad \text{mit gesuchtem } n.$$
$$1-0{,}7^n > 0{,}99$$
$$0{,}7^n < 0{,}01$$
$$n \cdot \ln 0{,}7 < \ln 0{,}01 \quad |: \ln 0{,}7 < 0\,(!)$$
$$n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}7} = 12{,}91 \Rightarrow n \ge 13$$

Sie müssen mindestens 13 Briefe überprüfen.

b) Es liegen eine Binomialverteilung mit $n = 100$ und $p = 0{,}3$ vor. Z gebe wieder die Anzahl der Briefe mit dem Zielort C an. Gesucht sind die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

(1) $B^{100}_{0,3}(Z=31) = 0{,}08398 = 8{,}40\,\%$ (Tabelle)

(2) $B^{100}_{0,3}(Z \le 32) = 0{,}71072 = 71{,}07\,\%$ (kumulative Tabelle)

(3) $B^{100}_{0,3}(Z > 28) = 1 - B^{100}_{0,3}(Z \le 28) = 1 - 0{,}37678$

$= 0{,}62322 = 62{,}32\,\%$ (kumultative Tabelle)

c) Erwartet werden $n \cdot p = 100 \cdot 0{,}3 = 30$ Briefe mit dem Zielort C. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit

$$B^{100}_{0,3}(|Z-30| < 6) = B^{100}_{0,3}(24 < Z < 36) = B^{100}_{0,3}(25 \le Z \le 35)$$
$$= B^{100}_{0,3}(Z \le 35) - B^{100}_{0,3}(Z \le 24)$$
$$= 0{,}88392 - 0{,}11357 = 0{,}77035$$
$$= 77{,}04\,\% \qquad \text{(kumulative Tabelle)}$$

Grundkurs Mathematik Klausur

Lösung zu Kl.4.2

1. a) Mit den angegebenen Bezeichnungen A: „Leser der Zeitung XZ“ und B: „Leser der Zeitung YZ“ ergibt sich die folgende Vierfeldertafel, in der die in der Aufgabenstellung gegebenen Wahrscheinlichkeiten unterstrichen sind. Die restlichen Wahrscheinlichkeiten sind ergänzt.

	B	$\overline{B}$	
A	0,4	<u>0,2</u>	<u>0,6</u>
$\overline{A}$	<u>0,1</u>	0,3	0,4
	0,5	0,5	1

Aus dieser Vierfeldertafel erhält man:

(1) $P(A \cap B) = 0{,}4 = 40\,\%$, d. h. 40 % lesen beide Zeitungen.

(2) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}3 = 30\,\%$, d. h. 30 % lesen keine der beiden Zeitungen.

(3) $P[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)] = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3 = 30\,\%$, d. h. 30 % lesen nur genau eine der beiden Zeitungen.

(4) $P[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})] = 1 - P(A \cap B) = 0{,}6 = 60\,\%$, d. h. 60 % lesen höchstens eine der beiden Zeitungen.

b) Die Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, wenn die Gleichung $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ gilt.

$$P(A \cap B) = 0{,}4 \neq 0{,}3 = 0{,}6 \cdot 0{,}5 = P(A) \cdot P(B)$$

$\Rightarrow$ Die Ereignisse A und B sind stochastisch abhängig.

c) Es gilt stets: P (mindestens ein …) = 1 – P (kein …), d. h.

$$1-(1-p)^n > \gamma \quad \text{mit } p = 0{,}5 \text{ und } \gamma = 0{,}99. \text{ Gesucht ist } n.$$

$$1-0{,}5^n > 0{,}99$$

$$0{,}5^n < 0{,}01$$

$$n \cdot \ln 0{,}5 < \ln 0{,}01 \quad \Big| : \ln 0{,}5 < 0 \; (!)$$

$$n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}5} = 6{,}64 \Rightarrow n \geq 7$$

Man muss mindestens sieben Beschäftigte befragen.

2. a) Es liegt eine Binomialverteilung mit n = 100 und p = 0,6 vor. Z gebe die Anzahl der XZ-Leser an. Gesucht sind die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

(1) $B_{0,6}^{100}(Z \geq 55) = 1 - B_{0,6}^{100}(Z \leq 54) = 1 - (1 - 0{,}86891)$

$= 0{,}86891 = 86{,}89\,\%$ (kumulative Tabelle)

(2) Es werden $100 \cdot 0{,}6 = 60$ XZ-Leser erwartet.

$B_{0,6}^{100}(Z \leq 63) = 1 - 0{,}23861 = 0{,}76139$

$= 76{,}14\,\%$ (kumulative Tabelle)

b) (1) Wegen p = 0,6 ist der erste ankommende Angestellte mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % ein XZ-Leser.

(2) Es treten sechs XZ-Leser und vier Nicht-XZ-Leser auf. Da der sechste XZ-Leser auf dem 10. Platz festliegt, kann man die restlichen fünf XZ-Leser auf neun Plätze verteilen, d. h. für dieses Ereignis E_1 gilt:

$P(E_1) = \binom{9}{5} \cdot 0{,}6^6 \cdot 0{,}4^4 = 0{,}15049 = 15{,}05\,\%$ (Taschenrechner)

(3) Es darf nicht sein, dass keiner der ersten drei Angestellten kein XZ-Leser ist, d. h. für dieses Ereignis E_2 gilt:

$P(E_2) = 1 - 0{,}4^3 = 1 - 0{,}064 = 0{,}936 = 93{,}6\,\%$ (Taschenrechner)

3. a) Wenn man nur nach XZ-Leser und Nicht-XZ-Leser unterscheidet, dann braucht man nur die sechs Plätze für die XZ-Leser aus den zehn Plätzen auszuwählen. Es gibt

$\binom{10}{6} = 210$ verschiedene Sitzordnungen.

b) Die sechs XZ-Leser können auf den Plätzen 1–6, 2–7, 3–8, 4–9, 5–10, d. h. auf fünf Arten nebeneinander sitzen, d. h. für dieses Ereignis E_3 gilt mit $|\Omega| = \binom{10}{6} = 210$:

$P(E_3) = \frac{5}{210} = 0{,}02381 = 2{,}38\,\%$ (Taschenrechner)

c) Wenn am Anfang und am Ende jeweils ein XZ-Leser sitzt, dann gibt es für die restlichen vier XZ-Leser nur noch acht Plätze, d. h. für dieses Ereignis E_4 gilt:

$P(E_4) = \frac{\binom{8}{4}}{\binom{10}{6}} = \frac{70}{210} = \frac{1}{3} = 33{,}33\,\%$ (Taschenrechner)