55. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

550711

Löse die folgende Scherzaufgabe und begründe deine Antwort:

Angenommen, eineinhalb Hühner legen in eineinhalb Tagen genau eineinhalb Eier. Wie viele Eier legen dann sieben Hühner in sechs Tagen?

550712

Wir betrachten ein Quadrat Q_1 mit der Seitenlänge a, ein Quadrat Q_2 mit der Seitenlänge b und ein Rechteck R mit den Seitenlängen a und b.

a) Wir untersuchen zuerst den Spezialfall $a = 7\,\mathrm{cm}$, $b = 4\,\mathrm{cm}$.

Zeichne die Vierecke Q_1, Q_2 und R.

Begründe: Man kann das Quadrat Q_1 so in rechteckige Teilflächen zerlegen, dass man aus diesen Teilflächen und dem Quadrat Q_2 zweimal das Rechteck R und ein neues Quadrat Q_3 zusammenfügen kann.

Ermittle den Flächeninhalt des Quadrats Q_3.

b) Beweise nun für beliebige Seitenlängen a und b: Die Summe der Flächeninhalte von Q_1 und Q_2 ist stets größer oder gleich dem Doppelten des Flächeninhalts von R.

550713

Eva und Laura vereinbaren das folgende Spiel: Eva nimmt gleichartige Bindfäden gleicher Länge derart in eine Hand, dass von jedem Bindfaden an jeder Seite ihrer Faust genau ein Ende herausragt. Laura verknüpft zunächst auf einer Seite der Faust jedes Bindfadenende mit genau einem anderen Bindfadenende auf dieser Seite der Faust und verknüpft anschließend auf der anderen Seite der Faust jedes Bindfadenende mit genau einem anderen Bindfadenende auf jener Seite der Faust. Stellt sich beim Öffnen der Hand heraus, dass die Bindfäden einen einzigen „Ring“ bilden, so hat Laura das Spiel gewonnen. Anderenfalls hat Eva gewonnen.

a) Untersuche, welches Mädchen bei diesem Spiel die größeren Gewinnchancen hat, wenn Eva 4 Bindfäden nimmt.

b) (Zusatzaufgabe für besonders Interessierte) Untersuche, welches Mädchen bei diesem Spiel die größeren Gewinnchancen hat, wenn Eva 6 Bindfäden nimmt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

<u>550714</u>

Für rationale Zahlen x betrachten wir die Ungleichung

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\,. \tag{1}$$

a) Zeige, dass die Ungleichung (1) für $x = \frac{4}{3}$, $x = \frac{8}{5}$ und $x = \frac{11}{10}$ gilt.

b) Begründe, warum die Ungleichung (1) für keine nichtpositive Zahl x gilt.

Die Ungleichung (1) gilt für eine positive Zahl x genau dann, wenn die Ungleichung

$$x^2 + 1 \geq 2x \tag{2}$$

für diese positive Zahl x gilt, da die Ungleichung (2) aus der Ungleichung (1) durch Multiplikation mit x entsteht. Um zu beweisen, dass die Ungleichung (1) für jede positive Zahl x gilt, genügt es daher zu beweisen, dass die Ungleichung (2) für jede positive Zahl x gilt.

c) Beweise, dass die Ungleichung (2) für jede positive Zahl x gilt, indem du die Erkenntnisse der Aufgabe 550712 nutzt.

d) Beweise, dass die Ungleichung (2) für jede positive Zahl x gilt, indem du begründest, dass die Ungleichung $(x-1)^2 \geq 0$ für jede positive Zahl x gilt, und aus dieser Ungleichung die Ungleichung (2) herleitest.

Zusatzaufgaben für besonders Interessierte:

e) Begründe, dass die Ungleichung $x - 1 \geq \frac{x-1}{x}$ für $x \geq 1$ gilt.
Leite aus dieser Ungleichung die Ungleichung (1) zunächst für alle Zahlen x mit $x \geq 1$ her und folgere hieraus die Gültigkeit der Ungleichung (1) für x mit $0 < x < 1$.

f) Untersuche, für welche positiven Zahlen x in der Ungleichung (1) Gleichheit eintritt.