55. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklassen 9 und 10
Aufgaben

Hinweise: 1. *Für die Jahrgangsstufen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

551011

a) Weisen Sie nach, dass es eine natürliche Zahl $a > 1$ gibt, für die der Term

$$82 \cdot \left(a^8 - a^4\right)$$

durch das Produkt von drei aufeinanderfolgenden und mindestens zweistelligen natürlichen Zahlen teilbar ist.

b) Bestimmen Sie die kleinste mindestens zweistellige Primzahl a, für die

$$82 \cdot \left(a^8 - a^4\right)$$

durch das Produkt von drei aufeinanderfolgenden und mindestens zweistelligen natürlichen Zahlen teilbar ist.

c) Der obige Term wird jetzt durch $82 \cdot (a^8 - a^2)$ ersetzt.
Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl $a > 1$, für die dieser Term durch das Produkt von drei aufeinanderfolgenden und mindestens zweistelligen natürlichen Zahlen teilbar ist.

551012

Beweisen Sie: Wenn in einem Dreieck ABC die Beziehung $|\sphericalangle ACB| = 3 \cdot |\sphericalangle BAC|$ gilt, dann lässt sich dieses Dreieck in zwei nicht kongruente gleichschenklige Teildreiecke zerlegen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

551013

In einem rechtwinkligen (x, y)-Koordinatensystem sind die Punkte $A(0, 0)$, $B(b, 0)$, $C(b, c)$ und $D(0, d)$ mit positiven reellen Zahlen b, c, d gegeben. Es sei E der Schnittpunkt der Geraden AC und BD. Mit F wird der Fußpunkt des Lotes von E auf die Gerade AB bezeichnet.

a) Bestimmen Sie für $b = 5$, $c = 3$ und $d = 6$ die Länge der Strecke $\overline{EF}$.

b) Wählt man aus den Punkten A, B, C, D, E und F jeweils drei Punkte aus, die nicht auf einer Geraden liegen, so erhält man ein Dreieck. Nennen Sie drei verschiedene Paare ähnlicher Dreiecke, die man auf diese Weise erhalten kann.

c) Zeigen Sie allgemein für beliebige positive reelle Werte von b, c und d, dass stets

$$|EF| = \frac{c \cdot d}{c + d}$$

gilt.

551014

a) Es sei $p(x) = a\,x^2 + b\,x + (a + b)$.
Weisen Sie nach, dass für $a = 2{,}5$ und $b = 0{,}5$ die Funktionswerte $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$ und $p(11)$ jeweils ganzzahlig sind.

b) Es sei $p(x) = a\,x^2 + b\,x + (a + b)$ mit rationalen Koeffizienten a und b. Ferner seien $p(0)$ und $p(-1)$ ganze Zahlen.
Zeigen Sie, dass $p(x)$ für jede ganze Zahl x ganzzahlig ist.

551015

Gegeben sind ein quaderförmiges Aquarium mit den folgenden Innenmaßen

$$\text{Länge} = 114\,\text{cm},\ \text{Breite} = 41\,\text{cm und Höhe} = 100\,\text{cm}$$

und weiterhin drei gleich große Eisenwürfel der Kantenlänge 40 cm.

In das Aquarium werden $180\,000\,\text{cm}^3$ (= 180 Liter) Wasser gefüllt. Kann man die Eisenwürfel so in das Aquarium legen, dass alle drei unter Wasser liegen?

551016

a) Jeder Punkt einer Ebene sei rot oder blau gefärbt. (Oder exakter formuliert: Jedem Punkt der Ebene wird entweder die Farbe Rot oder die Farbe Blau zugeordnet.)
Zeigen Sie, dass es in dieser Ebene stets zwei Punkte mit dem Abstand 1 gibt, die die gleiche Farbe haben.

b) Jeder Punkt einer Ebene sei in einer der drei Farben Rot, Gelb oder Blau gefärbt.
Zeigen Sie, dass es auch in dieser Ebene stets zwei Punkte mit dem Abstand 1 gibt, die die gleiche Farbe haben.

Bemerkung: Stellen Sie sich beispielsweise vor, dass aus farbigem Papier mikroskopisch kleines Konfetti ausgestanzt wird und dieses Konfetti so dicht auf einem Tisch ausgestreut wird, dass die Tischdecke vollständig mit farbigen Konfettistückchen überdeckt ist.