

2.5 Das Integral im Sachzusammenhang

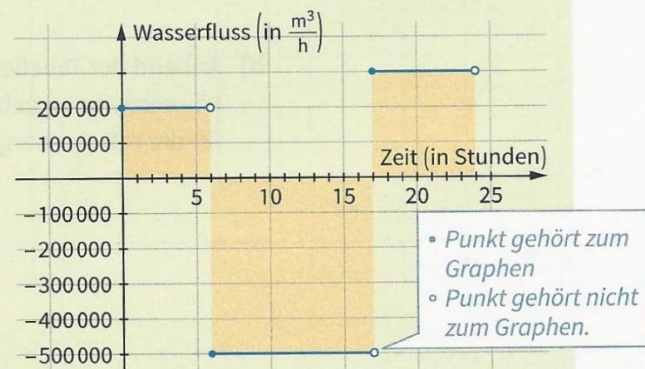
Pumpspeicherwerk Markersbach

Pumpspeicherkraftwerke nutzen Überangebote elektrischer Energie aus dem Stromnetz, um Wasser aus einem unteren Becken in ein oberes zu pumpen. In Markersbach im Erzgebirge befindet sich das zweitgrößte Pumpspeicherwerk in Deutschland und eine der größten Wasserkraftanlagen dieser Art in Europa. Öffnet sich der Kugelschieber in Markersbach, strömen unter Vollast aus dem rund sechs Millionen Kubikmeter Wasser fassenden Oberbecken 420 000 Liter pro Sekunde Richtung Unterbecken, wodurch mithilfe von Generatoren elektrische Energie an das Netz zurückgegeben wird.



Rechts ist der Wasserfluss für das obere Becken des Pumpspeicherwerkes dargestellt. Der negative Wasserfluss bedeutet, dass Wasser aus dem oberen Becken hinausfließt. Zu Beginn waren 4,5 Millionen m³ Wasser im oberen Becken enthalten.

- Bestimmen Sie das Wasservolumen im oberen Becken nach 3, 6, 12, 15, 17, 20 und 24 Stunden.
- Stellen Sie das Wasservolumen im oberen Becken in Abhängigkeit von der Zeit für die 24 Stunden grafisch in einem neuen Koordinatensystem dar. Welche Zusammenhänge lassen sich zwischen dem Wasserfluss und dem Wasservolumen anhand der beiden Graphen erkennen?
- Berechnen Sie auch die Flächeninhalte der drei Flächen zwischen dem Graphen der Änderungsrate und der Zeitachse. Was wird durch diese Flächen veranschaulicht?



Aus: Elemente der Mathematik 12 Sachsen, Bildungshaus Schulbuchverlage 2019, S. 13.

Wenn eine gegebene Funktion ***f*** eine **Änderungsrate** angibt, so kann man mithilfe des Integrals - genauer mit dem **orientierten** Flächeninhalt zwischen x-Achse und dem Graphen der Änderungsrate - die **Gesamtänderung der Größe F** in einem bestimmten Intervall berechnen.

Typische Beispiele:

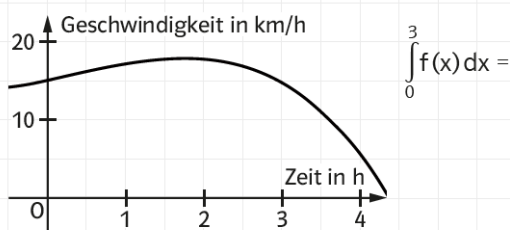
Momentane Änderungsrate der Größe	Gesamtänderung	
Geschwindigkeit $v(t)$	zurückgelegter Weg s in $[t_1; t_2]$	$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$
Beschleunigung $a(t)$	Geschwindigkeit v in $[t_1; t_2]$	$v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$
Wachstumsgeschwindigkeit $w(t)$	Längenwachstum L in $[t_1; t_2]$	$L = \int_{t_1}^{t_2} w(t) dt$
Momentaner Schadstoffausstoß $e(t)$	Schadstoffausstoß E in $[t_1; t_2]$	$E = \int_{t_1}^{t_2} e(t) dt$
Momentane Durchflussmenge $d(t)$	Durchflussmenge D in $[t_1; t_2]$	$D = \int_{t_1}^{t_2} d(t) dt$
Kraft (entlang eines Weges) $F(s)$	Arbeit W in $[s_1; s_2]$	$W = \int_{s_1}^{s_2} F(s) ds$

Tipp: Wenn man die Einheiten der Achsen bei einer dargestellten Änderungsrate multipliziert, dann erhält man die passende Einheit des Integrals und kann damit die Bedeutung des Integrals im Anwendungskontext leicht erkennen.

1. Berechnen Sie jeweils die Integrale und erklären Sie die Bedeutung im Kontext.

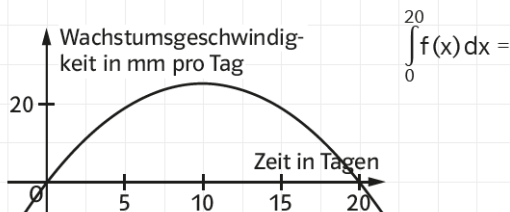
a) Die Funktion f mit

$f(x) = -0,4x^3 + 0,5x^2 + 2x + 15$ gibt für $0 \leq x \leq 3$ näherungsweise die Geschwindigkeit eines Radfahrers in km/h nach x Stunden an.



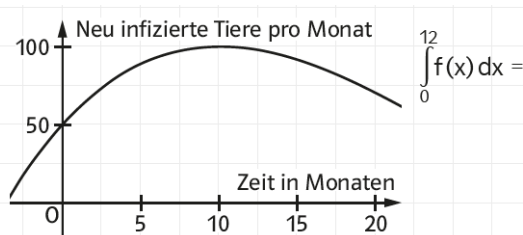
Bedeutung des berechneten Integrals im Kontext:

b) Die Funktion f mit $f(x) = -\frac{x^2}{4} + 5x$ gibt für $0 \leq x \leq 20$ näherungsweise die Wachstumsgeschwindigkeit in mm/Tag einer Pflanze nach x Tagen an.



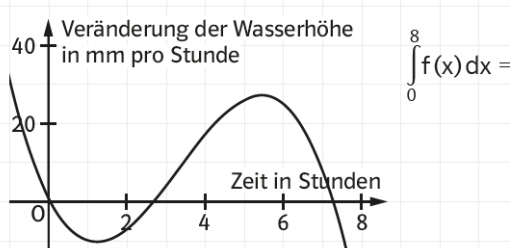
Bedeutung des berechneten Integrals im Kontext:

c) Für $0 \leq x \leq 12$ beschreibt die Funktion f mit $f(x) = 0,01x^3 - 0,7x^2 + 11x + 50$ näherungsweise die Anzahl der Neuinfektionen einer Tierkrankheit pro Monat, wobei $x = 0$ dem Januar 2011 entspricht.



Bedeutung des berechneten Integrals im Kontext:

d) Die Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 10x^2 - 20x$ gibt für $0 \leq x \leq 8$ näherungsweise an, wie sich die Wasserhöhe eines Stausees verändert (x in Stunden, $f(x)$ in mm pro Stunde). Zum Zeitpunkt $x = 0$ beträgt die Wasserhöhe 5 m.



Bedeutung des berechneten Integrals im Kontext:

2. Ein Tank enthält zu Beginn ($t = 0$) zwei Liter Benzin. Es wird nun Benzin hinzugefügt. Die momentane Zuflussrate (in Liter pro Sekunde) kann für $0 \leq t \leq 10$ näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden. Es gilt: $f(t) = -0,03t^3 + 0,3t^2$.

a) Ermittle, wann die Zuflussgeschwindigkeit am größten ist.

b) Bestimme den Zeitpunkt, zu dem die Zuflussgeschwindigkeit am stärksten zunimmt.

c) Ermittle, wie viel Benzin innerhalb der fünf Sekunden nach Beginn des Füllvorgangs insgesamt in den Tank geflossen ist.

d) Gib an, wie viel Benzin nach 10 Sekunden im Tank ist.

3. Die Wachstumsgeschwindigkeit einer Pflanze, die mit einer Größe von 14 cm angepflanzt wurde, kann in den ersten 30 Tagen näherungsweise durch die Funktion v mit $v(t) = -\frac{1}{90}t^2 + \frac{1}{3}t$ modelliert werden. Dabei gibt t die Zeit in Tagen und $v(t)$ die Wachstumsgeschwindigkeit in cm pro Tag an.

a) Bestimme, wann die Wachstumsgeschwindigkeit am größten ist.

b) Berechne, wie viel die Pflanze in den 30 Tagen gewachsen ist.

c) Gib an, wie hoch die Pflanze nach 30 Tagen ist.

d)* Durch das Düngen der Pflanze kann das Wachstum der Pflanze verstärkt werden. Die Wachstumsgeschwindigkeit einer gedüngten Pflanze kann durch die Funktionenschar $v_d(t) = d \cdot \left(-\frac{1}{180}t^2 + \frac{1}{6}t\right)$ beschrieben werden, wobei $d > 1$ von der Menge des verwendeten Düngers abhängt. Bestimme d für eine gedüngte Pflanze, die nach 30 Tagen 80 cm groß ist.