Hinweis

Um der Vielfalt der Schulsysteme in den Bundesländern Rechnung zu tragen, aber auch die Mathematik-Olympiade bundesweit durchführen zu können, wurde der Begriff *Olympiadeklasse* geprägt. Die Aufgaben und Lösungen werden für die Olympiadeklassen 3 bis 12 angeboten.

Für die Bundesrunden gelten die folgenden Regeln zur Einstufung der Teilnehmer in die Olympiadeklassen 8 bis 12. Es wird empfohlen, diese Regeln in gleicher Weise für alle Olympiadeklassen der ersten 3 Runden anzuwenden.

- Für die Primarstufe und die Sekundarstufe 1 entspricht die Olympiadeklasse grundsätzlich dem laufenden Schuljahr.

- Für die Sekundarstufe 2 gibt es bundesweit unterschiedliche Bezeichnungen oder Nummerierungen der schulischen Jahrgangsstufen. In der Abiturstufe sind daher
  - die Olympiadeklasse 10 für die einjährige Einführungsphase und
  - die Olympiadeklassen 11 und 12 für die beiden Jahre der Qualifikationsphase

  vorgesehen.

- Die beiden Standard-Abläufe der Olympiadeklassen für die Primarstufe bis zum Abitur sind:
  - **G8**

laufendes Schuljahr	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Jahrgangsstufe	3	4	5	6	7	8	9	10/E	Q	Q
Olympiadeklasse	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

  - **G9**

laufendes Schuljahr	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Jahrgangsstufe	3	4	5	6	7	8	9	10	E	Q	Q
Olympiadeklasse	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**10**	**11**	**12**

- **Wichtig: Doppelstart in Olympiadeklasse 10**
  Für eine optimal abgestimmte Vergleichbarkeit zwischen den beiden Abläufen starten Schülerinnen und Schüler aus G9 sowohl in ihrem Abschlussjahr der Sekundarstufe 1 als auch im Einführungsjahr der Sekundarstufe 2 in der Olympiadeklasse 10.

- **Wichtig: Klasse 13 startet in Olympiadeklasse 12**
  Daher starten Schülerinnen und Schüler aus G9 in ihrem Abiturjahr in der Olympiadeklasse 12.

Olympiadeklassen

11–12

60. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

<u>Hinweis:</u> *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

<u>601211</u>

Für positive ganze Zahlen a, b und c werden die Zahlen

$$x = 60a + 13b \text{ und } y = 60a + 11c$$

gebildet.

Man bestimme alle Möglichkeiten der Wahl von a, b und c, für die die Gleichung

$$4x^2 - y^2 = 2020$$

gilt, und begründe, dass es keine weiteren Lösungen gibt.

<u>601212</u>

Alina und Bernd untersuchen die Teilbarkeit positiver ganzer Zahlen. Zunächst gibt Alina eine Ziffer a vor und bildet die Zahl mit der Dezimaldarstellung $\overline{100a}$. Anschließend wählt Bernd eine Ziffer b. Nun soll Alina durch Einfügen einer oder mehrerer Ziffern b eine Zahl der Form

$$\overline{100ba}, \qquad \overline{100bba}, \qquad \overline{100bbba}, \ldots$$

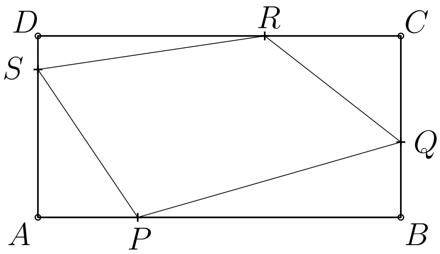
bilden. Findet Alina eine solche Zahl, die mit $\overline{100a}$ keinen gemeinsamen Teiler größer als 1 besitzt, hat sie gewonnen, anderenfalls siegt Bernd. Man bestimme alle Ziffern a, durch deren Wahl Alina ihren Gewinn sichern kann.

Hinweis: Mit $\overline{abcd}$ wird diejenige positive ganze Zahl bezeichnet, die in der Dezimaldarstellung von links nach rechts genau die Ziffern a, b, c und d besitzt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

601213

Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$. Die Punkte P auf $\overline{AB}$, Q auf $\overline{BC}$, R auf $\overline{CD}$ und S auf $\overline{AD}$ seien innere Punkte der Rechteckseiten (siehe Abbildung A 601213). Für welche Lagen der Punkte P, Q, R und S hat das Viereck $PQRS$ den kleinsten Umfang?



A 601213

Hinweis: Innere Punkte einer Strecke sind alle Punkte dieser Strecke mit Ausnahme der Endpunkte.

601214

Ritas Farbe ist rot und Gerds Farbe ist grün. Sie beginnen ein Spiel, bei dem sie abwechselnd einen noch nicht gefärbten Punkt der Ebene in ihrer Farbe einfärben, wobei Rita beginnt.

Gewonnen hat derjenige, dem es gelingt, in ein Dreieck, dessen drei Eckpunkte die eigene Farbe tragen und bei dem kein innerer Punkt in der Farbe des Gegners gefärbt ist, einen Punkt der eigenen Farbe zu setzen.

Man entscheide, ob einer der Spieler den Gewinn erzwingen kann.

Anmerkung: Ein innerer Punkt eines Dreiecks ist ein Punkt der Dreiecksfläche, der weder auf einer Dreiecksseite liegt noch ein Eckpunkt ist.