Hinweis

Um der Vielfalt der Schulsysteme in den Bundesländern Rechnung zu tragen, aber auch die Mathematik-Olympiade bundesweit durchführen zu können, wurde der Begriff *Olympiadeklasse* geprägt. Die Aufgaben und Lösungen werden für die Olympiadeklassen 3 bis 12 angeboten.

Für die Bundesrunden gelten die folgenden Regeln zur Einstufung der Teilnehmer in die Olympiadeklassen 8 bis 12. Es wird empfohlen, diese Regeln in gleicher Weise für alle Olympiadeklassen der ersten 3 Runden anzuwenden.

- Für die Primarstufe und die Sekundarstufe 1 entspricht die Olympiadeklasse grundsätzlich dem laufenden Schuljahr.

- Für die Sekundarstufe 2 gibt es bundesweit unterschiedliche Bezeichnungen oder Nummerierungen der schulischen Jahrgangsstufen. In der Abiturstufe sind daher
  - die Olympiadeklasse 10 für die einjährige Einführungsphase und
  - die Olympiadeklassen 11 und 12 für die beiden Jahre der Qualifikationsphase

  vorgesehen.

- Die beiden Standard-Abläufe der Olympiadeklassen für die Primarstufe bis zum Abitur sind:
  - **G8**

laufendes Schuljahr	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Jahrgangsstufe	3	4	5	6	7	8	9	10/E	Q	Q
Olympiadeklasse	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

  - **G9**

laufendes Schuljahr	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Jahrgangsstufe	3	4	5	6	7	8	9	10	E	Q	Q
Olympiadeklasse	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**10**	**11**	**12**

- **Wichtig: Doppelstart in Olympiadeklasse 10**
  Für eine optimal abgestimmte Vergleichbarkeit zwischen den beiden Abläufen starten Schülerinnen und Schüler aus G9 sowohl in ihrem Abschlussjahr der Sekundarstufe 1 als auch im Einführungsjahr der Sekundarstufe 2 in der Olympiadeklasse 10.

- **Wichtig: Klasse 13 startet in Olympiadeklasse 12**
  Daher starten Schülerinnen und Schüler aus G9 in ihrem Abiturjahr in der Olympiadeklasse 12.

Olympiadeklassen
11–12

61. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

611211

Die positiven ganzen Zahlen a, b, c und d haben die folgenden vier Eigenschaften:

(1) a und c sind Primzahlen.

(2) c und d unterscheiden sich um genau 1.

(3) a, b, c erfüllen die Gleichung $a \cdot b + 1 = c$.

(4) b, c, d erfüllen die Gleichung $b \cdot d + 1 = b \cdot c + 6$.

Man berechne die Zahl $(b \cdot d + 1) \cdot 10\,000 + d \cdot 100 + c$.

611212

Für eine natürliche Zahl n werden alle Möglichkeiten betrachtet, n rote und n schwarze Kugeln in einer Reihe anzuordnen. Zwei Anordnungen werden dabei als gleich angesehen, wenn auf den Plätzen „1“, „2“, …, „$2n$“ jeweils die Farben der Kugeln übereinstimmen.

Man beweise, dass die Anzahl dieser Anordnungen durch $(n + 1)$ teilbar ist.

611213

Es seien a und b zwei gegebene reelle Zahlen mit $|a| \neq |b|$. Wir betrachten das folgende Gleichungssystem für die reellen Unbekannten x und y:

$$x + |y| = a\,,$$
$$|x| + y = b\,.$$

Man bestimme alle Lösungspaare (x, y) in Abhängigkeit von a und b.

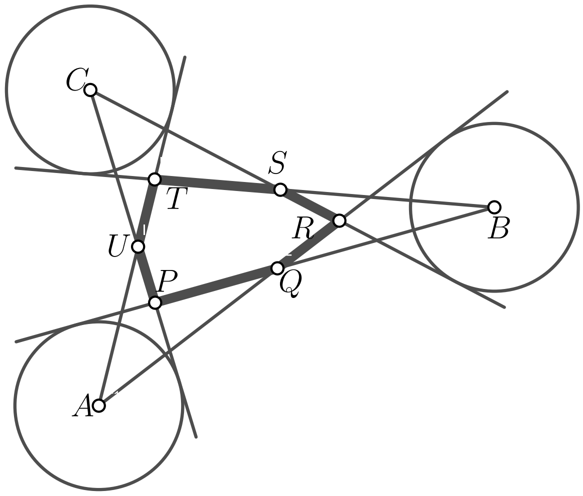
Auf der nächsten Seite geht es weiter!

611214

Die Mittelpunkte A, B, C dreier kongruenter Kreise, die keine gemeinsamen Punkte haben, liegen nicht auf derselben Geraden. Von den Punkten A, B, C werden die sechs in Abbildung A 611214 gezeigten Tangenten an die Kreise gelegt, die ein konvexes Sechseck einschließen.

Man beweise: Die Summen der Längen von jeweils drei paarweise nicht unmittelbar benachbarten Seiten dieses Sechsecks sind gleich, d. h., es gilt

$$|PQ| + |RS| + |TU| = |QR| + |ST| + |UP| \; .$$



A 611214