Hinweis

Um der Vielfalt der Schulsysteme in den Bundesländern Rechnung zu tragen, aber auch die Mathematik-Olympiade bundesweit durchführen zu können, wurde der Begriff *Olympiadeklasse* geprägt. Die Aufgaben und Lösungen werden für die Olympiadeklassen 3 bis 12 angeboten.

Für die Bundesrunden gelten die folgenden Regeln zur Einstufung der Teilnehmer in die Olympiadeklassen 8 bis 12. Es wird empfohlen, diese Regeln in gleicher Weise für alle Olympiadeklassen der ersten 3 Runden anzuwenden.

- Für die Primarstufe und die Sekundarstufe 1 entspricht die Olympiadeklasse grundsätzlich dem laufenden Schuljahr.

- Für die Sekundarstufe 2 gibt es bundesweit unterschiedliche Bezeichnungen oder Nummerierungen der schulischen Jahrgangsstufen. In der Abiturstufe sind daher
  - die Olympiadeklasse 10 für die einjährige Einführungsphase und
  - die Olympiadeklassen 11 und 12 für die beiden Jahre der Qualifikationsphase

  vorgesehen.

- Die beiden Standard-Abläufe der Olympiadeklassen für die Primarstufe bis zum Abitur sind:
  - **G8**

laufendes Schuljahr	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Jahrgangsstufe	3	4	5	6	7	8	9	10/E	Q	Q
Olympiadeklasse	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

  - **G9**

laufendes Schuljahr	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Jahrgangsstufe	3	4	5	6	7	8	9	10	E	Q	Q
Olympiadeklasse	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**10**	**11**	**12**

- **Wichtig: Doppelstart in Olympiadeklasse 10**
  Für eine optimal abgestimmte Vergleichbarkeit zwischen den beiden Abläufen starten Schülerinnen und Schüler aus G9 sowohl in ihrem Abschlussjahr der Sekundarstufe 1 als auch im Einführungsjahr der Sekundarstufe 2 in der Olympiadeklasse 10.

- **Wichtig: Klasse 13 startet in Olympiadeklasse 12**
  Daher starten Schülerinnen und Schüler aus G9 in ihrem Abiturjahr in der Olympiadeklasse 12.

Olympiadeklassen **9–10**

61. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

<u>Hinweise:</u> 1. *Für die Olympiadeklassen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

<u>621011</u>

a) Ermitteln Sie die kleinste positive ganze Zahl z, für die sowohl z als auch die Quersumme $Q(z)$ durch 2, durch 3 und durch 5 teilbar sind.

b) Ermitteln Sie die kleinste positive ganze Zahl z, für die sowohl z als auch die Quersumme $Q(z)$ durch 2, durch 3, durch 4 und durch 5 teilbar sind.

<u>621012</u>

In dieser Aufgabe betrachten wir Summen von Quadratzahlen. Die kleinste der hier betrachteten Quadratzahlen soll die Eins mit $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$ sein. Die nächstgrößeren sind dann 4 wegen $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$ und 9 wegen $9 = 3 \cdot 3 = 3^2$ usw.

a) Vereinfachen Sie den Term

$$\left(a^2 + b^2 - c^2\right)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 .$$

b) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem die Summe von drei Quadratzahlen wieder eine Quadratzahl ist. Dabei darf eine Quadratzahl auch mehrfach als Summand auftreten.

c) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem die Summe von 2022 Quadratzahlen wieder eine Quadratzahl ist. Auch hier darf eine Quadratzahl mehrfach als Summand auftreten.

Hinweis: Es gibt für den Aufgabenteil c) auch Beispiele, bei denen alle Summanden paarweise verschieden sind. Finden Sie ein Beispiel?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

621013

Eine positive ganze Zahl n, die sich in der Form $n = a^2 + b^3$ mit positiven ganzen Zahlen a, b darstellen lässt, bezeichnen wir als *QK-Zahl* und alle anderen positiven ganzen Zahlen als *Nicht-QK-Zahl*.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der QK-Zahlen im Bereich von 1 bis einschließlich 100.
b) Entscheiden Sie, ob es im Bereich von 1 bis 1 000 000 mehr QK-Zahlen als Nicht-QK-Zahlen gibt.

Hinweis: 40 027 ist eine *QK-Zahl*, da $40\,027 = 200^2 + 3^3$ gilt und 200 sowie 3 positive ganze Zahlen sind.

621014

In einen Halbkreis mit Mittelpunkt M über dem Durchmesser $\overline{UV}$ mit $\left|\overline{UV}\right| = 12$ sei ein Quadrat $ABCD$ eingezeichnet, wobei A und B auf dem Durchmesser sowie C und D auf dem Halbkreis liegen. Weiter sei ein Quadrat $BEFG$ eingezeichnet, wobei B zwischen M und E auf dem Durchmesser $\overline{UV}$, F auf dem Halbkreis und G auf der Strecke $\overline{BC}$ liegen.

a) Konstruieren Sie eine solche Figur und begründen Sie Ihr Vorgehen.
b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt A_{ABCD} des Quadrats $ABCD$.
c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{A}_{ABCD} = 4 \cdot \mathrm{A}_{BEFG}$ gilt.

Hinweis: Die Zeichnung darf auch mit Hilfe eines geeigneten Computerprogramms angefertigt werden.

621015

In einem konvexen Fünfeck $ABCDE$ seien u die Summe der Seitenlängen (also der Umfang des Fünfecks) und d die Summe der Diagonalenlängen.

a) Zeigen Sie, dass stets $d < 2u$ gilt.
b) Zeigen Sie, dass stets $u < d$ gilt.

Hinweis: Ein Fünfeck ist konvex, wenn alle seine Diagonalen mit Ausnahme der Endpunkte im Inneren des Fünfecks verlaufen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

621016

2022 Piraten haben auf einer Insel einen Schatz, bestehend aus 10 000 Kokosnüssen, erbeutet. Sie wollen jetzt die Kokosnüsse einigermaßen gerecht unter sich aufteilen und gehen dazu wie folgt vor:

Alle Kokosnüsse werden auf einen Haufen gelegt und alle Piraten stellen sich in einer Schlange auf. Der Reihe nach geht jeweils der erste Pirat aus der Schlange zum Kokosnusshaufen, teilt die Anzahl der noch verbliebenen Kokosnüsse durch die Anzahl der verbliebenen Piraten, zu denen er selber auch gehört, rundet das Ergebnis auf die nächstgelegene ganze Zahl auf oder ab, nimmt sich entsprechend viele Kokosnüsse und segelt mit ihnen nach Hause. Dann ist der nächste Pirat dran und so weiter.

Bestimmen Sie, wie viele Kokosnüsse

a) die ersten drei Piraten,
b) die Piraten, die am Anfang an 1803. und 1804. Stelle stehen,
c) die letzten beiden Piraten

erhalten.

Hinweis: Ist die erste Ziffer nach dem Komma größer oder gleich fünf, so wird aufgerundet. Ist die erste Ziffer nach dem Komma kleiner als fünf, so wird abgerundet.